Contrôle continu 2011 - correction

Ex. 1 On considère

$$\begin{cases} L_+ = z^2\partial_z + \partial_{\bar z} \\ L_- = -\partial_z - \bar z^2 \partial_{\bar z} \\ L_z = z\partial_z - \bar z\partial_{\bar z} \end{cases}$$

Les relations de commutation élémentaires

$$[z,\partial_z] = [\bar z, \partial_{\bar z}] = -1$$

$$[z,\partial_{\bar z}] = [\bar z, \partial_z] = [\partial_z, \partial_{\bar z}] = [z,\bar z] = 0.$$

Les commutateurs peuvent être calculés en appliquant systématiquement la règle de Leibnitz :

$$[L_+, L_-] = [z^2\partial_z + \partial_{\bar z}, -\partial_z - \bar z^2\partial_{\bar z}] = -[z^2\partial_z, \partial_z] - [\partial_{\bar z}, \bar z^2 \partial_{\bar z}] =$$

$$= -\underbrace{[z,\partial_z]}_{-1} z\partial_z - z\underbrace{[z,\partial_z]}_{-1}\partial_z - \underbrace{[\partial_{\bar z},\bar z]}_{1}\bar z\partial_{\bar z} - \bar z\underbrace{[\partial_{\bar z},\bar z]}_{1}\partial_{\bar z}$$

$$= 2(z\partial_z - \bar z\partial_{\bar z}) = 2L_z$$

$$[L_+, L_z] = [z^2\partial_z + \partial_{\bar z}, z\partial_z - \bar z\partial_{\bar z}] = [z^2\partial_z, z\partial_z] - [\partial_{\bar z}, \bar z\partial_{\bar z}] =$$

$$= [z, z\partial_z] z\partial_z + z\underbrace{[z\partial_z, z\partial_z]}_{0} - \underbrace{[\partial_{\bar z}, \bar z]}_{1}\partial_{\bar z} =$$

$$= z\underbrace{[z,\partial_z]}_{-1} z\partial_z - \partial_{\bar z} = -z^2\partial_z - \partial_{\bar z} = -L_+$$

$$[L_-, L_z] = [-\partial_z - \bar z^2\partial_{\bar z}, z\partial_z - \bar z\partial_{\bar z}] = -[\partial_z, z\partial_z] + [\bar z^2\partial_{\bar z}, \bar z\partial_{\bar z}] =$$

$$= -\underbrace{[\partial_z, z]}_{1}\partial_z + [\bar z, \bar z\partial_{\bar z}]\bar z\partial_{\bar z} + \bar z\underbrace{[\bar z\partial_{\bar z}, \bar z\partial_{\bar z}]}_{0} =$$

$$= -\partial_z + \bar z\underbrace{[\bar z, \partial_{\bar z}]}_{-1}\bar z\partial_{\bar z} = -\partial_z - \bar z^2\partial_{\bar z} = L_-.$$

Ex. 2 Nous allons utiliser les relations de récurrence :

$$\begin{cases} J_\nu'(r) = \frac{\nu}{r}J_\nu(r) - J_{\nu+1}(r) \\ J_\nu'(r) = -\frac{\nu}{r}J_\nu(r) + J_{\nu-1}(r) \end{cases} \Longrightarrow$$

en considérant la différence, on trouve

$$\frac{\nu}{r}\left(J_\nu(r) + J_\nu(r)\right) - J_{\nu+1}(r) - J_{\nu-1}(r) = 0$$

et donc $J_{\nu+1}(r) + J_{\nu-1}(r) = \frac{2\nu}{r} J_\nu(r)$.

Ex. 3) D'abord on va répondre à la 2ème question.
$Y_3^{-1}(\theta,\varphi)$ et $Y_2^{-1}(\theta,\varphi)$ correspondent aux valeurs propres différentes de L^2 ($\ell=3$ et $\ell=2$), donc ces 2 fonctions sont orthogonales par rapport au produit scalaire standard sur la sphère S^2. D'où

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \overline{Y_2^{-1}(\theta,\varphi)}\, Y_3^{-1}(\theta,\varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \langle Y_2^{-1}, Y_3^{-1} \rangle = 0.$$

La forme explicite:

$$Y_3^{-1}(\theta,\varphi) = C_3^{-1} P_3^{-1}(\cos\theta) e^{-i\varphi} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\cdot 3+1}{4\pi} \frac{4!}{2!}} \frac{(\sin\theta)^{-1}}{2^3\, 3!} \left[\frac{d^2}{dz^2}(z^2-1)^3\right]_{z=\cos\theta} e^{-i\varphi} =$$

$$= \sqrt{\frac{7}{4\pi}\cdot 12} \frac{(\sin\theta)^{-1}}{8\cdot \cancel{6}} \left[\frac{d}{dz} \cancel{3}(z^2-1)^2 \cdot \cancel{2}z\right]_{z=\cos\theta} e^{-i\varphi} =$$

$$= \sqrt{\frac{21}{\pi}} \frac{1}{8\sin\theta} \left[2(z^2-1)\cdot 2z\cdot z + (z^2-1)^2\right]_{z=\cos\theta} e^{-i\varphi} =$$

$$= \sqrt{\frac{21}{\pi}} \frac{1}{8\sin\theta} \left[(z^2-1)(5z^2-1)\right]_{z=\cos\theta} e^{-i\varphi} =$$

$$= \sqrt{\frac{21}{\pi}} \frac{1}{8\sin\theta} (-\sin^2\theta)(5\cos^2\theta - 1) e^{-i\varphi} =$$

$$= \sqrt{\frac{21}{\pi}} \frac{\sin\theta(1-5\cos^2\theta)}{8} e^{-i\varphi}.$$

$$Y_2^{-1}(\theta,\varphi) = C_2^{-1} \frac{(-1)}{2^2\, 2!} \left[e^{i\varphi}(\partial_\theta + i \operatorname{ctg}\theta\, \partial_\varphi)\right] \sin^2\theta\, e^{-2i\varphi} =$$

$$= \sqrt{\frac{5}{4\pi}\cdot 6} \frac{(-1)}{8} e^{-i\varphi}\left(2\sin\theta\cos\theta + i \operatorname{ctg}\theta \sin^2\theta(-2i)\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{5}{4\pi}\cdot 6} \frac{(-1)}{8} e^{-i\varphi} \cdot 4\sin\theta\cos\theta =$$

$$= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta\cos\theta\, e^{-i\varphi}.$$

Ex. 4) On considère

$$xy'' + (b-x)y' - ay = 0$$

et on cherche $y(x)$ sous la forme

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$$

$\Downarrow$

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cdot k x^{k-1}$$

$\Downarrow$

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cdot k(k-1) x^{k-2}$$

En substituant dans l'équation, on trouve

$$0 = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k k(k-1) x^{k-1}}_{"xy''"} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} b\alpha_k \cdot k x^{k-1}}_{"by'"} - \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cdot k x^k}_{"xy'"} -$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} a \alpha_k x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cdot k(k-1+b) x^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (k+a) x^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k k(k-1+b) x^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (k+a) x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\alpha_{k+1}(k+1)(k+b) - \alpha_k (k+a)\right] x^k,$$

d'où on obtient une relation de récurrence

$$\alpha_{k+1}(k+1)(k+b) - \alpha_k (k+a) = 0$$

$\Downarrow$

$$(*) \qquad \alpha_{k+1} = \frac{k+a}{(k+1)(k+b)} \alpha_k$$

Montrons par induction que la solution de cette équation est donnée par

$$(**) \qquad \alpha_k = \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(b+k)} \alpha_0$$

- l'hypothèse est vraie pour $k=0$.
- supposons qu'elle est vraie pour $k=n$:

$$\alpha_n = \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(b+n)}$$

• mais alors

$$\alpha_{n+1} = \left| \begin{matrix} \text{d'après} \\ (*) \end{matrix} \right| = \frac{n+a}{(n+1)(n+b)} \cdot \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(b+n)} =$$

$$= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \cdot \frac{1}{n!\,(n+1)} \cdot \frac{(n+a)\,\Gamma(n+a)}{(n+b)\,\Gamma(n+b)} =$$

$$= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \frac{1}{(n+1)!} \frac{\Gamma(a+n+1)}{\Gamma(b+n+1)} \Rightarrow$$ la formule (**) est démontrée.

Nous avons donc

$$M(a,b,x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(b+k)} \frac{x^k}{k!}$$

D'autre part,

$$\int_0^1 e^{xt} t^{a-1} (1-t)^{b-a-1}\, dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(xt)^k}{k!} t^{a-1} (1-t)^{b-a-1}\, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \int_0^1 t^{a+k-1} (1-t)^{b-a-1}\, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \frac{\Gamma(a+k)\,\Gamma(b-a)}{\Gamma(\cancel{a}+k+b-\cancel{a})} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(b+k)} \frac{x^k}{k!} \cdot \Gamma(b-a)$$

et donc

$$M(a,b,x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 e^{xt} t^{a-1} (1-t)^{b-a-1}\, dt$$